תורת הקבוצות, תרגיל 6

1. הגדרה: קבוצה סדורה לינארי $(A, \leq)$ תיקרא צפופה אם $A \neq \emptyset$ ולכל $x, y \in A$ כך, ש- $x < y$ קיים $z \in A$ עבורו $x < z < y$.
   א. תהיינה (A, R) ו- (B, S) קבוצות סדורות לינארי איזומורפיות. הוכח, כי אם A צפופה אז גם B צפופה.
   ב. הוכח, כי אם $(A, <)$ סדורה לינארי וצפופה אזי $(A, <)$ אינה סדורה היטב.

2. יהיו α, β, γ סודרים. הוכח, כי מתקיים:
   א. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
   ב. אם $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ אזי $\beta = \gamma$.
   ג. אם $\beta \geq \alpha$ אז קיים סודר γ יחיד עבורו $\alpha = \beta + \gamma$.

3. יהי α סודר.
   א. הוכח, כי לא יתכן $\alpha \in \alpha$.
   ב. הוכח, כי לא קיימים $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ עבורם $\alpha \ni \beta_1 \in \beta_2 \in \beta_3 \in \beta_1$.
   ג. הוכח, כי אם $\beta \in \alpha$ אז גם β הוא סודר.

4. א. יהיו α, β סודרים. הוכח, כי $\alpha \cap \beta$ גם הוא סודר.
   ב. הוכח, כי לכל שני סודרים α, β מתקיים $\beta \subseteq \alpha$ או $\alpha \subseteq \beta$.

5. הוכח (ע"י בניית פונקציות חח"ע ועל) כי בזוגות הבאות הקבוצות הן שקולות:
   א. קבוצת המספרים הטבעיים וקבוצת המספרים השלמים.
   ב. $A = [0, 1]$ ו- $B = (0, 1)$.
   ג. קבוצת המספרים הטבעיים וקבוצת המספרים הראשוניים.

תאריך ההגשה: 6.4.2005